# Квантовая эргодичность

Конспект микрокурса

Михаил Дубашинский

Лаборатория Чебышёва, ноябрь — декабрь 2017 г.

Хорошо известна хаотичность (эргодичность) гиперболических аносовских систем. Модельный пример такой системы — геодезический поток на компактном многообразии $X$ постоянной отрицательной кривизны $-1$ (гиперболической поверхности).

В квантовой механике классическим гамильтоновым системам сопоставляются их *квантования*, задаваемые уравнением Шрёдингера. Согласно принципу соответствия Бора, квантование классической системы должно наследовать её свойства при малых значениях постоянной Планка. Будет ли квантование геодезического потока хаотическим?

Интерпретация хаоса в духе теоремы Биркгофа–Хинчина приводит к вопросам спектральной геометрии. Пусть $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — собственные функции оператора (Бельтрами–)Лапласа на $X$; считаем, что $\int_X u_j^2 \, d\,\mathrm{Vol} = 1$ при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Основная цель микрокурса — следующий результат (А.И. Шнирельман'74; Zelditch'86; Colin de Verdière'85):

**Теорема** (о квантовой эргодичности)**.** *Найдётся такая последовательность индексов* $\{j_k\}_{k=1}^{\infty}$ *плотности* 1 *в* $\mathbb{N}$, *что* $u_{j_k}^2 \cdot \mathrm{Vol} \xrightarrow[k\to\infty]{}{}^{*} \mathrm{const} \cdot \mathrm{Vol}$ *в смысле мер.*

Упомянутое выше квантование — не что иное, как сопоставление функции $a(x, \xi)$ *псевдодифференциального* оператора $a^{\mathrm{Weyl}}(x, hD)$ с символом $a(x, \xi)$. Значительная часть курса посвящена исчислению таких операторов в евклидовом пространстве и на многообразиях, в частности — вычислению их асимптотик при $h \to 0$ (*квазиклассических* асимптотик).

После построения теории псевдодифференциальных операторов доказательство результата о квантовой эргодичности получается с помощью пропускания эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина через квантование Вейля. (Также полезно считать следы операторов в духе закона Вейля.)

## Список литературы

- M. Zworski, L.C. Evans, *Semiclassical Analysis*, 2012. Изложена квазиклассическая теория, посчитаны асимптотики, построено исчисление на многообразиях. Стиль не очень удачный, много ошибок. Последняя теорема из этой книги — о квантовой эргодичности.

- C. Muscalu, W. Schlag, *Classical and Multilinear Harmonic Analysis*, Vol. I, 2013. Компактно (около 30 страниц) изложена теория ПДО в евклидовом пространстве. Стиль изложения хорош и близок аналитику. Ничего нет про многообразия, совсем немного — про квазиклассику.

- Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Том 3, глава 18.

Также на русском языке известны две книги:

- М.А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, 2003.
- М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, 1985.

Также — кое-что из книги N.Bergeron, *The Spectrum of Hyperbolic Surfaces*, и статей Anantharaman и Дятлова.

## План курса

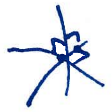
Большая часть курса — без доказательств.

- Введение. Постановка задачи. Мотивация: классическая и квантовая динамика.
- Определение квантования. Корректность. Класс Кона–Ниренберга.
- Теорема Кальдерона–Вейянкура об $L^2$-ограниченности операторов нулевого порядка.
- Символ композиции двух операторов: явные формулы, асимптотика при $h \to 0$.
- Теорема Ю. Егорова о соответствии классической и квантовой динамики.
- Неравенства Гординга (Gårding): оператор с положительным символом *почти* положителен.
- Квазиклассические меры (дефектные, Вигнера–Хусими).[1] Существование, носитель, инвариантность относительно гамильтонова потока.
- Теоремы Анантараман–Нонненмахера (об энтропии квазиклассических мер) и Дятлова–Жина (о носителе квазиклассических мер).
- Теорема Э. Линденштраусса о строгой квантовой эргодичности арифметических поверхностей.
- Замена переменной в символе. Оправдание класса Кона–Ниренберга.
- ПДО на многообразиях. Вычисление символа оператора Бельтрами–Лапласа.
- Закон Вейля; обобщённый закон Вейля.
- Квантовая эргодичность: доказательство.
- Аппендикс: преобразование Фурье–Хельгасона на плоскости Лобачевского.

[1] В излагаемом доказательстве теоремы о квантовой эргодичности эти меры не используются.

# Квантовая эргодичность. Вступление.

$X$ — компактное риманово многообразие; $\partial X=\varnothing$; $\Delta$ — оператор Бельтрами-Лапласа:

 — геод.; $\Delta u(x_0) := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma_j^2}$

$\exists$ $-\Delta u_n = \lambda_n u_n$ — чисто дискретный спектр (если $X$-комп.). $0=\lambda_0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\to\infty$

$\int u_n^2 \, dVol = 1$

**Гипотеза:** $u_n^2 \longrightarrow const \; \left[= \frac{1}{Vol\, X}\right]$ (Quantum Unique Ergodicity)

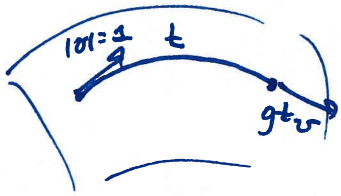
$u_{n_k}^2 \longrightarrow const$ — Quantum Ergodicity

— бывает верно, неверно и неизвестно. Соотносится со св-вами геодезического потока на $X$.

## Геодезический поток

Опр. $SX = \{v \in TM : |v| = 1\}$ — сферическое расслоение (можно в $S^*X$).

Опр. $t\in\mathbb{R}$. $g^t: SX \to SX$ — геодезический поток:




Зам. $g^t: TX \to TX$ тоже.

Зам. $H(x,v) := |v|^2/2$, $v\in T_x^*X$ — инвариант для $g^t$ на $T^*X$ и гамильтониан.

$T^*X = \bigcup_{c\geq 0} \{v : |v| = c\}$ — разбиение на инвариантные многообразия.

Q: Будет ли $g^t$ эргодическим на $SX$?

Опр. Мера Лиувилля в $SX$: $E\subset SX$, $\mu(E) = \int_X dVol(x)\cdot \mathcal{H}^{d-1}(E \cap S_x X)$

Утв. $g^t_\# \mu = \mu$

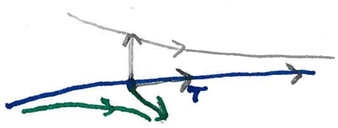
Опр. $g^t$ эргодичен на $SX$, если: $E\subset SX$ — инвариантное $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\mu(E)=0\\ \mu(SX\setminus E)=0\end{array}\right.$

Шкала хаотичности: . Вполне интегрируемые системы (есть ещё инварианты, кроме $H$) — нет хаоса

. . . .

## Гиперболические системы (аносовские)

Пусть $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$, $\dim SX = 3$



$\subset SX$ — возмущённые траектории стремятся к невозмущённой экспоненциально в смысле дифференциалов

## Гиперболические поверхности

– Компактная двумерная поверхность, $K = -1$.

$\tilde{X} \simeq \mathbb{H}$ – плоскость Лобачевского; $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$ – дискр.

Род $X \geq 2$.

__Утв.__ $g^t$ на $X$ – гиперб. поверхн. – обладает св-вом Аносова.

__Утв.__ $g^t$ на $SX$ эргодичен.

## Квантовая динамика

Частица движется по $X$, вероятностная. Распределение позиции координата: $|\Psi(x)|^2 \cdot d\mathrm{Vol}(x)$

$\Psi = \Psi(t, x)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i h \Delta \Psi \quad ; \quad h \to 0, \quad h \neq 10^{-34} \text{ Дж.с}$$

Принцип соответствия Бора: $QM(h) \xrightarrow[h \to 0]{} CM$

// Интерпретация //

__Теорема__ (А. Шнирельман'74; Zelditch'87; Colin de Verdière'85)

$\exists \{n_k\} \subset \mathbb{N}$ – плотности 1, т.ч. $u_{n_k}^2 \longrightarrow \mathrm{const}$

Интерпретация: $\forall$ $\Psi(0, x) = \Psi_h(0, x)$ конечной энергии ($E = \langle -h^2 \Delta \Psi, \Psi \rangle$).

Напр., $\Psi(0, x) = \sum\limits_{j:\, \lambda_j \in [\frac{1}{h^2}, \frac{2}{h^2}]} a_j u_j$

Пусть $\Psi_h(t, x)$ – решение Шрёдингера с таким $\Psi(0, x)$.

$$f_h(x) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\Psi_h(t, x)|^2 \, dt.$$

Квантовое понимание хаоса в духе Биркгофа-Хинчина: $f_h(\cdot) \xrightarrow[h \to 0]{*} \mathrm{const}$

(при $\forall$ выборе $\Psi_h(0, \cdot)$, как было)

Это $\Leftrightarrow$ $u_j^2 \xrightarrow{*} \mathrm{const}$

# <u>Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$</u>

Частица в $\mathbb{R}^n$; $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$ — координата и скорость.

$a(x,\xi)$ — „классическая наблюдаемая". Напр., из $S(\mathbb{R}^{2n})$

Надо: $a(x,\xi) \rightsquigarrow Op_h(a) : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

$a$ — символ $Op\, a$, $Op\, a$ — квантизация символа.
квантование

$$Op_h(a) := a(x, hD); \quad D = \frac{\nabla}{i}$$

$$Op(x_j) = \cdot x_j; \quad Op(\xi_j) = hD_j$$

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,dx$$

<u>Опр</u> „Стандартная ~~квантизация~~ квантование": $a(x,hD)u(x) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x,h\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{u}(\xi)\,d\xi =$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\, e^{i\langle x,\xi\rangle/h}\, \hat{u}\left(\frac{\xi}{h}\right) d\xi = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\, e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\, u(y)\,dy\,d\xi$$

<u>Опр</u> ~~Квантизация~~ Квантование Вейля:

$$a^W(x,hD)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\, u(y)\,dy\,d\xi$$

<u>Зам.</u> Это $\int_{\mathbb{R}^n} K_{a,h}(x,y)u(y)\,dy$, $K_{a,h}(x,y) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\,d\xi$

$$(K_{a,h})^* = K_{\bar{a}}$$

<u>Зам.</u> $a\in S'(\mathbb{R}^{2n}) \Rightarrow K_a \in S'(\mathbb{R}^{2n}) \Rightarrow a^W : S(\mathbb{R}^n)\to S'(\mathbb{R}^n)$.

Обратно, если $T: S'\to S$, то $Tu(x) = \int K(x,y)u(y)\,dy$, $K\in S'(\mathbb{R}^{2n}) \Rightarrow \exists a\in S'(\mathbb{R}^{2n}) : T = a^W$ ($h$ = fix)

## <u>Символы ограниченного роста</u>

<u>Опр</u> $m\in\mathbb{R}$; $S^m_{CN} = \{a : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \le C_{\alpha,\beta}\cdot(1+|\xi|)^{m-|\beta|}\}$ — символы Кона-Ниренберга.

KN kohn. Всюду лучше просто $S^m$

<u>Утв.</u> $a\in S^m_{KN}$; $u\in S(\mathbb{R}^n)$; $a(x,D)u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} dy\; a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{i(\xi,(x-y))} u(y)$ : $= \int_{\mathbb{R}^n} I_x(\xi)\,d\xi$
$h=1$

$$\sup_x |I_x(\xi)| \le \frac{C_k(u)}{(1+|\xi|)^k} \quad \forall k.$$

<u>Д-во</u> $L_\xi := 1 + i\xi\, \partial/\partial y$. $L_\xi e^{i\xi(x-y)} = (1+\xi^2)e^{i\xi(x-y)}$

$$I_x(\xi) = \int \frac{1}{(1+\xi^2)^l}\int L_\xi^l e^{i\xi(x-y)}\cdot\left(a\left(\tfrac{x+y}{2}\right)u(y)\right)dy = \frac{1}{\langle\xi\rangle^{2l}}\int e^{i\xi(x-y)}\underbrace{(L_\xi^*)^l\left(a\left(\tfrac{x+y}{2},\xi\right)u(y)\right)}_{O(\xi^{l+m})}dy$$

$\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$

<u>Сл-е</u> $a(x,hD)u(x) := \int I_{x,h}(\xi)\,d\xi = \dots$ можно взять в качестве def. $(a \in S^m_{CN})$

[<u>Зам.</u> Есть аппроксимационные процедуры ($\mathcal{S}$ плотно в $S^m_{CN}$ ...).

равномерно на компактах все производные

<u>Примеры:</u>

$a(x,\xi) = \xi^\alpha$. $\quad a^w(x,hD) = (hD)^\alpha = h^{|\alpha|} D^\alpha$

$a(x,\xi) = a(x) \quad a^w(x,hD) = a(x)$.

$a(x,\xi) = \langle x_0^*, x\rangle + \langle \xi_0, \xi\rangle \quad a^w = \langle x_0, x\rangle + \langle \xi_0, hD\rangle$

$a(x,\xi) = \sum_j c_j(x)\xi_j, \quad a^w(x,hD) = \frac{h}{2}\sum_j \left[D_j c_j + c_j D_j\right]$

$(D_{x_j} a)^w = [D_{x_j}, a^w]; \quad \left((hD_{\xi_j})a\right)^w = -[x_j, a^w]$

...

$\sup|a| < \infty \not\Rightarrow a^w: L^2 \to L^2$ - огр.
Напр., для стандартного квантования и $a = e^{-ix\cdot\xi}$, $h = 1$,
$a(x,D)u(x) = u(0)$ - не огр. $L^2$-$L^2$.

<u>Def</u> $S = \{a : \forall \alpha,\beta \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \le C_{\alpha,\beta}\}$ Вейянкур!

<u>Теорема</u> (Кальдерон-Вайланкур) Пусть $a$: $\forall \alpha,\beta \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \le C_{\alpha,\beta}$.

Тогда: $a^w(x,hD) : L^2 \to L^2$ - огр.

[Vaillancourt] $\|a^w(x,hD)\|_{L^2\to L^2} \le C(n)\cdot \sum_{|\alpha|\le Mn} h^{|\alpha|/2} \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha a|$ $\quad \sqrt{h}$ - из scaling'а

$M \equiv const$

Д-во - Котляр-Стейн. Надо оценивать композицию.

## <u>Формула и квазиклассическая асимптотика композиции</u>

<u>Теорема</u> 1. Пусть $a \in S^{m_1}_{KN}$, $b \in S^{m_2}_{KN}$. Тогда: $a^w(x,hD)\cdot b^w(x,hD) = (a\#b)^w(x,hD)$

$a\#b$ - произведение Мойала (Moyal) $\in S^{m_1+m_2}_{KN}$; зависит от $h$! $= a\#_h b$

где $$(a\#b)(x,\xi) = \left(e^{ih\,\sigma(D_x,D_\xi,D_y,D_\eta)/2}\, a(x,\xi)\, b(y,\eta)\right)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}$$

$\sigma(D_x,D_\xi,D_y,D_\eta) = D_\xi D_y - D_x D_\eta$
- оператор в $\mathbb{R}^{4n}$

// $a, b$ - в Фурье;
$\left(e^{i(\langle x,x_0\rangle + \langle \xi,\xi_0\rangle)}\right)^w_H = e^{\frac{i}{h}(\langle x,x_0\rangle + \frac{\langle x_0,\xi_0\rangle}{2})} u(x+\xi_0)$
$h = 1$

2. Пусть $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда:

$$(a\#b)(x,\xi) = \frac{1}{(\pi h)^{2n}} \iint_{\mathbb{R}^{2n}\,\mathbb{R}^{2n}} e^{-\frac{2i}{h}\sigma(w_1,w_2)}\, a((x,\xi)+w_1)\, b((x,\xi)+w_2)\, dw_1\, dw_2$$

$\sigma(x_1,\xi_1,x_2,\xi_2) = \langle \xi_1, x_2\rangle - \langle \xi_2, x_1\rangle$

# Асимптотика $a\#b$

**Th** 1. $a, b \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда: $\forall N = 0, 1, \ldots$

$$(a\#b)(x,\xi) = \sum_{k=0}^{N} \frac{i^k h^k}{k!} \left( \frac{\sigma(D_x, D_\xi, D_y, D_\eta)}{2} \right)^k \left( a(x,\xi)\, b(y,\eta) \right) \Big|_{\substack{\eta=\xi \\ y=x}} +$$

$$+ O_S(h^{N+1}).$$

// т.е. $\forall$ $S$-полунорма $= O(h^{N+1})$ //

2. $a \in S^{m_1}_{KN}$, $b \in S^{m_2}_{KN}$. $(a\#b)(x,\xi) = \ldots + O_{S^{m_1+m_2-N-1}_{KN}}(h^{N+1})$

Д-во - метод стационарной фазы

Сл-е: $a\#b = a \cdot b + \frac{i \cdot h}{2} \left( a_\xi b_y - a_x b_\eta \right) + O(h^2)$ // $D = -i\nabla$ //

$$\Rightarrow [a^W, b^W] = \frac{h}{i} \underbrace{\{a, b\}}_{\sum_j \left[ -\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{\partial b}{\partial \xi_j} + \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_j} \right]}^{W} + O(h^2)$$

$\frac{i}{h} [a^W, b^W] = \{a, b\}^W + O(h)$

$O(h) = O_{S^0}(h)$ !

Гамильтоновы системы:

$p \in S(\mathbb{R}^{2n})$ - гамильтониан / e.g. $p = |\xi|^2$

$\dot{x}_j = \frac{\partial p}{\partial \xi_j}$, $\dot{\xi}_j = -\frac{\partial p}{\partial x_j}$

$g^t_p$ - поток.

$a \in S(\mathbb{R}^{2n})$

$a_t := a \circ g^t_p$

$\frac{\partial a_t}{\partial t} = \{p, a\}$ $(1_C)$

Квантовая система:

$P(h)$ - квантовый гамильтониан $= p^W(x, hD)$

$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{P\Psi}{ih}$ - Шрёдингер

$\Psi(t) = e^{-\frac{iP(h)t}{h}} \Psi(0)$

$A: L^2 \to L^2$, $\langle A\Psi(t), \Psi(t) \rangle =$

$= \langle A(t)\Psi(0), \Psi(0) \rangle$

$A(t) = e^{iPt/h} A e^{-iPt/h}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{h} [P, A]$ $(1_Q)$

$(1_C) = (1_Q) + O(h)$

$\tilde{A}(t) = a^W_t(x, hD)$

Теорема Ю. Егорова ($\simeq 70'$) $p \in S^2_{KN}$; $a \in S^0_{KN}$. Тогда $\|A(t) - \tilde{A}(t)\|_{L^2 \to L^2} = O(h)$.

равномерно по $|t| < T$.

Зам. В некоторых случаях $|t| < T$ можно улучшить: $|t| \leq \log 1/h$ – время Эренфеста.

# Неравенства Гординга (Gårding)

Пусть $a \in S^0$, $a \geq 0$. ? $a^w \geq 0$ — неверно, вообще говоря.
Но: $a^w$ — с/с.

**Th 1** (простое нер-во) $a^w(x,hD) \geq -o(1)$ : $\forall \varepsilon\ \exists h_0 : \forall h < h_0$
$$\langle a^w(x,hD)u, u\rangle \geq -\varepsilon \|u\|^2_{L^2} \quad \forall u$$

**Th 2** („точное") $a^w(x,hD) \geq -O(h)$ (т.е. $\langle , \rangle \geq -Ch\|u\|^2_{L^2}$)

**Th 3** (Фефферман–Phong) $a^w(x,hD) \geq -Ch^2$ — для $a \in S^2_{CN}$.

— без д-ва

**Д-во Th. 1:** Пусть $\lambda > \varepsilon$. $b := \dfrac{1}{a + \lambda_\varepsilon} \in S$ — похоже на параметрикс

$$(a+\lambda^\varepsilon)\# b = 1 + \underbrace{\frac{h}{2i}\{a+\lambda^\varepsilon, b\}}_{=0} + \underbrace{O_S(h^2)}$$ почему-то равномерно по $\lambda$

$$\Rightarrow (a+\lambda^\varepsilon)^w \circ b^w = Id + \left(O_S(h^2)\right)^w = Id + O_{L^2\to L^2}(h^2)$$
$$b^w \circ (a+\lambda^\varepsilon)^w = \text{—''—}$$

// Лемма: $A: X \to Y$ — о.н.
$\exists B_1, B_2 : Y \to X$: $\left.\begin{matrix}\|AB_1 - Id_X\| < 1 \\ \|B_2 A - Id_X\| < 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists A^{-1}$ — огр.

$\Rightarrow$ $a + \lambda^\varepsilon$ обратим при малых $h$. $\forall \lambda > \varepsilon$ $\Rightarrow$ $a^w \geq -\varepsilon$ ∎

**Д-во Th. 2.** // $C$ из Th — зависит от конечного # полунорм в $S^0$ /

Anti-Wick quantization

$$\tilde{a}((x,\xi), h) := \frac{1}{\pi h^n} \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} a(y,\eta)\, e^{-((x-y)^2 + (\xi-\eta)^2)/h}\, dy\, d\eta$$

Тогда: $|\partial^\alpha \tilde{a} - \partial^\alpha a| \leq C \cdot h$ $\quad \|\tilde{a}^w(x,hD) - a^w(x,hD)\|_{L^2\to L^2} \leq C \cdot h$

(!) $\tilde{a}^w \geq 0$.

$$\langle \tilde{a}(x,hD)u, u\rangle_{L^2} = \ldots = \frac{1}{\pi^{n/2} h^{3n/2}} \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(y,\eta)\, e^{-|y|^2/h}\, |U_h(\eta)|^2\, dy\, d\eta$$

$$U_h(\eta) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2/h} \cdot e^{ix\cdot\eta/h}\, u(x)\, dx$$ ∎

Зам. $a(x,\xi) := x^2 \xi^2$ в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. $a^w(x,D) = \frac{1}{4}(xD_x + D_x x)^2 - \frac{1}{4} \ngeq 0$.
$h = 1$
можно сгладить до $\tilde{a} \in S$.
срезать

# Квазиклассические меры дефекта (меры Вигнера-Хусими)

Теорема $\{u(h)\}$ — семейство ф-й, $\sup \|u(h)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

$\exists \{h_j\},\ h_j \to 0$

$\exists\ \mu$ — мера Радона в $\mathbb{R}^{2n}$: $\forall a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\langle a^w(x,h_jD)\,u(h_j),\ u(h_j)\rangle_{L^2} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(x,\xi)\,d\mu .$$

$\mu \geq 0$. — по нер-ву Гординга.

$u(h)(x) := e^{i\varphi(x)/h}\, b(x)$, $\mu = |b(x)|^2\, \delta_{\{\xi = \partial\varphi(x)\}}\, \mathcal{L}^n_x$

Теорема $m \geq 0$. $p$ — эллиптический символ: $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p| \leq \langle\xi\rangle^m := (1+|\xi|^2)^{m/2}$

Если $|\xi| > C$, то $p \geq \frac{1}{C}\langle\xi\rangle^m$. $(p: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R})$.

Пусть $\|u(h)\|_{L^2} = 1$, $\|P(h)\,u(h)\|_{L^2} = o(1)$.

Тогда: $\operatorname{supp}\mu \subset p^{-1}(0)$. — „поверхность нулевой энергии", characteristic variety.

Пример: $p = -|\xi|^2 + 1$; $-h^2\Delta u(h) = u(h)$ ... будет $S^*X$ на многообразии

Д-во $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, $\operatorname{supp} a \not\cap \operatorname{supp}\mu$. ? $\int_{\mathbb{R}^{2n}} a\,d\mu = 0$. ? $\underbrace{a^w(x,hD)}_{A(h)}\, u(h) \xrightarrow{L^2} 0$

$q \in \cancel{C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})}\ S^m_{CN}$: $q = 1$ на $\{p=0\}$, $\operatorname{supp} q \not\cap \operatorname{supp} a$.

$\Rightarrow |p+iq| \geq \langle\xi\rangle^m$. $\langle hD\rangle^m = (\langle\xi\rangle^m)^w$ — снова на тему параметрикса

$$\underbrace{a^w}_{S^{-\infty}_{CN}} \circ \underbrace{\left(\frac{\langle\xi\rangle^m}{p+iq}\right)^w}_{S^0_{CN} \subset S^0} \circ \underbrace{\langle hD\rangle^{-m} \circ p^w}_{\left(\frac{p}{\langle\xi\rangle^m} + O_{S^{-1}_{CN}}(h)\right)^w} = \left(a + O_{S^{-1}_{CN}}(h)\right)^w = a^w + O_{L^2\to L^2}(h)$$

$(\ldots)(u(h)) = o_{L^2}(1)$

$\Rightarrow$ ■

Теорема Пусть $\|u(h)\|_{L^2} = 1$, $\|P(h)\,u(h)\|_{L^2} = o(h)$; $p: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $p \in S^2_{KN} = S^2$

$\forall a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ $\int_{\mathbb{R}^{2n}} \{p,a\}\,d\mu = 0$. Иначе говоря, $\mu$ инвариантна отн. $g^t_p$.

Д-во $P(h)^* = P(h)$; & $A(h) := a^w(x,hD)$

$\langle [P,A]\,u(h), u(h)\rangle = \langle APu, u\rangle - \langle Au, Pu\rangle = o(h)$

$[P,A] = \frac{h}{i}\{p,a\}^w + O_{L^2\to L^2}(h^2) \Rightarrow \langle [P,A]u,u\rangle = \langle \frac{h}{i}\{p,a\}^w u, u\rangle + O(h^2)$

$\langle \{p,a\}^w u, u\rangle = o(1)$

$\downarrow$

$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \{p,a\}\,d\mu$ ■

Вывод: Для Q.U.E. надо, чтобы предельная мера была абсолютно непр.

# Квазиклассические меры на многообразии $X$.

Пусть $-\Delta u_j = \lambda_j u_j$, $\quad u_j^2 \rightharpoonup^* \mathrm{const}$ ($\in C(X)^*$).

Считаем, что $\quad u_j^2 \cdot \mathrm{Vol} \rightharpoonup^* \bar\mu \in \mathrm{Mes}^+(X)$, $\bar\mu(X) = 1$.

Зам. На многообразии есть исчисление ΨДО.
$S^m(T^*X)$ - класс символов Кона-Ниренберга. $T^*$ - т.к. в ф-ле замены переменной для $a(x,\xi)$ $\xi$ преобразуется, как ковектор; см. далее.

$$\forall a \in S^m(T^*X) \longmapsto Op_h a : C^\infty(X) \to C^\infty(X) \text{ - оператор, } a(x, hD)$$

Считаем, что $(-h^2\Delta - 1)u_j = 0$, где $\boxed{h = 1/\sqrt{\lambda_j}}$ пробегает дискретное мн-во.

Утв. 1. $\exists \mu \in \mathrm{Mes}^+(T^*X)$: $\forall a \in C_0^\infty(T^*X)$

$$\langle (Op_h a) u_j, u_j \rangle \xrightarrow[\substack{h\to 0\\ j\to\infty}]{} \int_{T^*X} a\, d\mu \qquad (*)$$

2. $Op_h(|\xi|^2 - 1) u_j = 0 \Rightarrow \mathrm{supp}\, \mu \subset \{|\xi|^2 - 1 = 0\} = S^*X \simeq SX$.

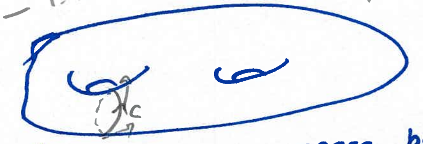
3. $\mu$ инвариантна отн. гамильтонова потока, порождённого гамильтонианом $p = |\xi|^2 - 1$, это $g^{2t}$ — ускоренный геодезический поток.

Зам. $a(x,\xi) = a(x) \notin C_0^\infty(T^*X)$, но его можно подставлять в (*). Почему-то.
Поэтому $\bar\mu = pr_{S^*X \to X}\, \mu$.

Если $\left.\begin{array}{l} \mu \ll \mu_L \text{ (Лиувилля)} \\ g^t\text{-эргодична отн. } \mu_L \end{array}\right\} \Rightarrow \mu = c \cdot \mu_L$.

— т.к. у $g^t$ есть замкнутые орбиты периодические

Зам. Есть $g^t$-инв. меры, которые $\not\ll \mu_L$:




$\mu_c$ - единичная масса, равномерно распределённая (по длине замкнутого геодезического цикла $c$) на единичных векторах, касательных к $c$ в его направлении

? $\mu = \mu_c$ ?

Th (Anantharaman-Nonnenmacher' 07) $X$-гиперб., $\mu$-квазиклассическая мера. Тогда $h^{K.C.}_{\{g^t\}} \mu \geq \frac{1}{2}$ — энтропия Колмогорова-Синая (метрическая).
$\Rightarrow \mu \neq \mu_c$!

Зам. $h \mu_c = 0$.

Зам. $\nu \in \mathrm{Mes}^+(S^*X)$, $\nu$ - $g^t$-инв., вероятностная

$$\begin{cases} h\nu \leq 1 \\ \text{„=“} \iff \nu = \mu_L \end{cases} \quad \text{— Ruelle-Sullivan}$$

Д-во – по определению с кучей техники (???). $SX = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} P_j$

$$\{Q_\alpha\} = \{ g^0 P_{j_0} \cap g^1 P_{j_1} \cap \ldots \cap g^n P_{j_n} \}$$

? $-\frac{1}{n} \sum_\alpha \mu(Q_\alpha) \log \mu(Q_j)$, и этого – $\sup_{\{P_j\}}$. $\cap \ldots \cap$ – переписать в композицию операторов, $\mu$ – через $u_h$.

<u>Сл-е</u> (Anantharaman): $h_{top}(\operatorname{supp} \mu) \geq \frac{1}{2}$

<u>Th</u> (Дятлов-Jin, лето'17): $\operatorname{supp} \mu = S^*X$ (сильнее)

– через фрактальный принцип неопределённости.

# Теорема Элинденштраусса ' 2006

**Th** $\exists\, X$ - компактные гипер6. поверхности: $u_n^2 \longrightarrow const$.

// $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}$, $\Gamma \in Isom^{+}(\mathbb{H}) = PSL(2,\mathbb{R})$, если $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

$$PSL = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad - bc = 1 \end{array} \right\} \Big/ \{\pm Id\}$$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

— изоморфна группе специальных кватернионов с нормой 1. Это арифметическая группа.

$$\Gamma_{a,b} := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_j \in \mathbb{Z} \\ x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab\, x_3^2 = 1 \end{array} \right\}$$

$a,b \in \mathbb{Z}_+$ det "

— конгруэнц-подгруппа.

$N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$. $\Gamma_{a,b}(N) := \{ (\dots) : \det = 1,\ x_0 - 1, x_1, x_2, x_3 \in N\mathbb{Z} \}$

**Утв.** 1. $N \geq 3 \Rightarrow \Gamma_{a,b}(N)$ без неподвижных точек (т.е. $\Gamma_{a,b}(N)\backslash\mathbb{H}$ - без конических особенностей)

2. Если $(0,0,0)$ — ! $\mathbb{Z}$-решение для $x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 = 0$, то $\Gamma_{a,b}(N)$ — кокомпактная. $(\Leftrightarrow)$ $(0,0,0,0)$ — ! решение $x_0^2 - a x_1^2 - b x_2^2 + ab x_3^2 = 0$

3. $\Gamma_{a,b}(N)$ — дискретная

$\Gamma_{a,b}(N)\backslash\mathbb{H}$ - комп. без особенностей

**Th** $X_{a,b}(N) := \Gamma_{a,b}(N)\backslash\mathbb{H}$ - арифметическая поверхность. — поверхность без особенностей, компактная. Она Q.U.E.

## Идея доказательства: Th Рудольфа

$S^1 = [0,1]/0{=}1$. $p \in \mathbb{P}, > 2$. $T_p := \{ \frac{a}{p^N} : N \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z} \}$ — $p$-рац. числа.

$T_p$ действует на $S^1$.

**Опр.** $\mu$ - мера ($\geq 0$, вероятностная) на $S^1$ — $T_p$-рекуррентная, если:
$\forall B \subset S^1$, $\mu(B) > 0 \Rightarrow \exists\, \omega \in T_p : \mu(B \cap (B + \omega)) > 0$.

**Зам.** Если $\mu$ инвариантна отн. умножения на $p$, то: рекуррентность $\Leftarrow$ что-то про энтропию.

**Th Рудольфа** $\mu \geq 0$, вероятностная. $\mu$ инвариантна отн. удвоения на $S^1$ и $T_p$-рекуррентна для нек. $p > 2 \in \mathbb{P}$. Тогда $\mu$ - мера Лебега.

# Замена переменной

$\gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм; $\gamma = Id$ вне компакта. $\tilde{u}$ — ф-я справа, $\gamma^* \tilde{u} := \tilde{u} \circ \gamma$ — pull-back

$a \in S(\mathbb{R}^{2n})$ — слева. $\tilde{A} := \gamma^{-1*} a^w(x, hD)\gamma^*$ — push-forward оператора

**Теорема** $\tilde{A}(h)$ — Ψ.Д.О. (символ зависит от $h$) $= \tilde{a}(x, hD)$

$S \ni \tilde{a}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = a(\gamma^{-1}\tilde{x}, \partial\gamma^T_{|\gamma^{-1}\tilde{x}} \tilde{\xi}) + O_S(h)$

$\tilde{a}(\gamma x, \tilde{\xi}) = a(x, \partial\gamma^T(x)\tilde{\xi}) + O_S(h)$

**Зам. 1** $A = a^w = h\frac{\partial}{\partial\vec{e}}$ $\quad a = \langle \vec{e}, \xi\rangle$ ; $\gamma$ — линейная

$\tilde{A} = h\frac{\partial}{\partial(\gamma\vec{e})}$ $\quad \tilde{a} = \langle \gamma\vec{e}, \tilde{\xi}\rangle = \langle \vec{e}, \gamma^T\tilde{\xi}\rangle = a(\gamma^T\tilde{\xi})$

$\Rightarrow \xi$ действует на вектор и преобразуется как ковектор.

**Зам. 2** Можно работать с полуплотностями $u(x)|dx|^{1/2}$. // $\exists \int (u|dx|^{1/2})^2$ //

Тогда поправка $O(h^2)$ в замене символа.

# Класс Кона-Ниренберга

Пусть $a$: $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \le \langle\xi\rangle^m$. $\tilde{a}(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = a(\gamma^{-1}\tilde{x}, (\partial\gamma^T \circ \gamma^{-1}\tilde{x})\tilde{\xi})$

$\partial_{\tilde{x}}\tilde{a} = \partial_x a \cdot \frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial a}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial(\partial\gamma^T \circ \gamma^{-1}\tilde{x})}{\partial\tilde{x}} \cdot \underline{\tilde{\xi}}$ — плохо!

**Утв.** $S^m_{KN} = \{a : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \le \langle\xi\rangle^{m-|\beta|}\}$ инвариантен относительно замены переменной в символе.

**Теорема** $a \in S^m_{KN}$. $\underbrace{(\gamma^{-1})^* \circ a^w \circ \gamma^*}_{=\tilde{a}^w} \in (S^m_{KN})^W$, $\tilde{a}(\gamma x, \tilde{\xi}) = a(x, \partial\gamma^T(x)\tilde{\xi}) + O_{S^{m-1}_{KN}}(h)$.

**Св-во:** вне диагонали $K_a(x,y)$ — гл.д.

$a \in S^m_{CN}$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\varphi \not\cap \operatorname{supp}\psi$

$\Rightarrow \|\varphi a^w \psi\|_{H_h^{-N}(\mathbb{R}^n) \to H_h^N(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty)$

$\|u\|^2_{H^s_h} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2} \underbrace{\hat{u}(\xi)}_{F_h u(\xi)}\|^2_{L^2}$ $\qquad F_h u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi\rangle/h} u(x)\,dx$.

$= h^n \int_{\mathbb{R}^n} (1 + h^2|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$

можно просто $\|\cdot\|_{H^{-N} \to H^N}$

# Ψ.D.O. на римановых многообразиях

— вначале был оператор! // Класса $S^m_{KN}$ // $X$ — риманово многообразие комп. $\partial X = \varnothing$

**Опр.** $m \in \mathbb{R}$. $A: C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ — оператор класса $\Psi^m$, если

1. $\forall$ карты $\gamma: \underset{\overset{\cap}{X}}{U_\gamma} \to \underset{\overset{\cap}{\mathbb{R}^n}}{V_\gamma}$ $\exists$ символ $a_\gamma \in S^m_{CN}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, т.ч.

$$\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(U_\gamma) \quad \varphi A \psi u = \varphi \gamma^* a^w_\gamma(x, hD)\, \gamma^{-1\,*}(\psi u)$$

2. —??? $\forall \varphi, \psi \in C^\infty(X)$, $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi$ — следует из (1)

$$\Rightarrow \|\varphi A \psi\|_{H_h^{-N}(\operatorname{supp}\psi) \to H_h^N(\operatorname{supp}\varphi)} = O(h^\infty)$$

$h$ — неважно

**Теорема** $\Psi^m / h\Psi^{m-1} \simeq S^m_{CN}(T^*X) / h S^{m-1}_{CN}(T^*X)$.

$\forall A \mapsto \sigma(A): T^*X \to \mathbb{C} \mid \sigma: \forall \gamma \quad a_\gamma\big|_{V_\gamma \times \mathbb{R}^n} = \gamma^*_{T^*U_\gamma \to T^*V_\gamma} \sigma + h S^{m-1}_{CN}$

$\forall a \in S^m_{CN} \mapsto Op(a)$ $\quad \sigma$ — главный символ

**Пример**: оператор Бельтрами-Лапласа.

$g_{ij}$ — метрический тензор; $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$

$$h^2 \Delta_g = \frac{h^2}{\sqrt{\det(g_{kj})}} \sum_{k,j} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{kj}\sqrt{\det g_{kj}}\, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = h^2 g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} + \underbrace{h^2 L^1}_{h\Psi^1} =$$

$$= h^2 g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} + \sum b^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

? $\sigma(-h^2\Delta_g) = |\xi|^2 = \xi_k \xi_j g^{kj}$

$$A = a^w_{1/2} = a_1(x, hD) \Rightarrow a_{1/2} = e^{i\cdot(1/2 - 1)h\langle D_x, D_\xi\rangle} a_1 =$$

$$a_1 = g^{jk}\xi_j\xi_k + h\sum b^j \xi_j \Big| = a_1 + \int_0^h \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{2}it\langle D_x, D_\xi\rangle} a_1\right) dt =$$

$$= a_1 + \int_0^h \Big[ -\frac{1}{2}i \cdot \overbrace{e^{-\frac{1}{2}ih\langle D_x, D_\xi\rangle} \langle D_x, D_\xi\rangle \left(g^{jk}\xi_j\xi_k\right) + h b^j\xi_j}^{S^1_{KN}}\Big) +$$

$$+ \underbrace{e^{-\frac{1}{2}ih\langle D_x, D_\xi\rangle}\left(b^j \xi_j\right)}_{S^1_{KN}} \Big] dh = a_1 + h S^1_{CN}$$

$e^{-\frac{1}{2}ihD_x \cdot D_\xi}$ сохраняет $S^m$!
— это в духе стационарной фазы

**Зам.** Дирихле $\rightsquigarrow$ Нейман на $\partial\Omega$ — $\Psi DO$ на $\partial\Omega$; $\sigma = \sigma\left(\sqrt{-\Delta_{\partial u} + 1}\right) =$

$-\Delta u = 0$ в $\Omega$, $u = f$ на $\partial\Omega$ $\quad f \mapsto \frac{\partial u}{\partial n}$

$= (?) \sqrt{1 + |\xi|^2}$

**Теорема** $V: X \to \mathbb{R}$, $V \in C^\infty$. $\quad P(h) := -h^2\Delta + V$

$\exists f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда $f(P(h)) \in \Psi^{-\infty}(X)$. $\sigma\, f(P(h)) = f(|\xi|^2 + V(x))$

— почти аналитическое продолжение, Beals' theorem

# Кокасательное расслоение

$U \subset X$ - карта. $(x^1, \dots, x^n)$ - лок. координаты. ? $T^*U = \{(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n)\}$

$= w = \xi_1 dx^1 + \dots + \xi_n dx^n$

← симплектическая форма на $T^*X$, каноническая

**У.в.** Форма $\omega = dx^1 \wedge d\xi_1 + \dots + dx^n \wedge d\xi_n$ не зависит от параметризации.

$\frac{\omega^{\wedge n}}{n!} \neq 0$ может быть принята за форму объёма. $Vol_{T^*X}$

— симплектический объём

## Закон Вейля (Weyl)

$P(h) = -h^2\Delta + V$. $u_j(h)$: $P(h)u_j(h) = \lambda_j(h)u_j(h)$

**Теорема** 1. $a < b$. $\#\{j : a \leq \lambda_j(h) \leq b\} = \frac{1}{(2\pi h)^n}\left[Vol_{T^*M}\{a \leq |\xi|^2 + V \leq b\} + \underset{h\to 0}{o(1)}\right]$

2. Пусть $\underset{0}{\lambda_0} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ - с.з. оператора $-\Delta$. [Досчитывается в картах.]

$$\#\{j : \lambda_j < T\} = \frac{Vol_{\mathbb{R}^n}(B_0(1)) \cdot Vol\, X}{(2\pi)^n} \cdot T^{n/2} + \theta(T^{n/2})$$

**Д-во** $2 \Leftarrow 1$. 1: $LHS = tr\, \mathbb{1}_{[a,b]}(-\Delta)$.

$f_1 \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq f_2$. $\Leftarrow f_j(-\Delta)$ $\quad tr\, f_1(-\Delta) \leq LHS \leq tr\, f_2(-\Delta)$

$f_j \in S(\mathbb{R})$

$-\Delta \rightsquigarrow -h^2\Delta + V(x)$ всюду

$\sigma(f_j(-\Delta)) = f_j(|\xi|^2 + V(x))$

$$tr\, f_j(-\Delta) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\left(\int_{T^*X} f_j(|\xi|^2 + V(x))\,dx\,d\xi + O(h)\right) \Rightarrow \blacksquare$$

В $\mathbb{R}^n$ без поправки, на многообразии — в карте! т.к. $K_{a,h}(x,y) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int a(x,\xi)e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\,d\xi$

$tr\, a^w = \int K(x,x)dx = \frac{1}{(2\pi h)^n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} a(x,\xi)\,dx\,d\xi$

**Теорема** (обобщённый закон Вейля). Пусть $A \in \Psi^0(X)$.

$$(2\pi h)^n \sum_{a \leq \lambda_j \leq b} \langle Au_j(h), u_j(h)\rangle \longrightarrow \int_{a \leq |\xi|^2 + V \leq b} \sigma(A)\,dx\,d\xi$$

$$\sum_{a \leq \lambda_j \leq b} \langle Au_j(h), u_j(h)\rangle \longrightarrow \int_{a \leq |\xi|^2 + V \leq b} \sigma(A)\,d\,Vol_{T^*X}$$

# Квантовая эргодичность

$X$ - риманово, комп., $\partial X = \varnothing$.

$p := |\xi|^2 + V$ или $|\xi|^2$

$a<b$: на $\{a \le p \le b\}$ $|\partial p|$ отделён от нуля

$a<c<b$. $\exists\, \mu_c$ - мера на $\{p=c\}$ : $\int\limits_{p^{-1}[a,b]} f\,dx\,d\xi = \int\limits_a^b dc \int\limits_{\{p=c\}} f\,d\mu_c$

// Если $p = |\xi|^2$, то $\mu_c = d\theta\,dx$, $d\theta$ - мера угла в $S_{\{x_0\}}X$.
$\dim X = 2$

$$g^t : T^*X \to T^*X : \quad \dot{x} = \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$ $V=0 \Rightarrow$ геодезический поток на $T^*X$.

Зам. $\forall \{p=c\}$ - $g^t$-инв.

Пусть $g^t$ эргодичен: $\forall c \in [a,b]$ $g^t|_{\{p=c\}}$ эргодичен отн. $\mu_c$

**Th** Тогда: $\forall f \in L^2(\{p=c\}, \mu_c)$ $\quad \int\limits_{\{p=c\}} \Big(\langle f\rangle_T - \fint\limits_{\{p=c\}} f\,d\mu_c\Big)^2 d\mu_c \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$

$$\langle f\rangle_T := \frac{1}{T}\int_0^T f(g^t)\,dt$$

$P(h) = -h^2\Delta + V$

**Th Егорова** Пусть $A \in \Psi^0(X)$; $A(t) := e^{itP(h)/h} A\, e^{-itP(h)/h}$ - квантовая эволюция наблюдаемой.

$$\tilde{A}(t) := Op\big(\sigma(A)\circ g^t\big)$$

При fix $T<\infty$ $\quad \|A(t) - \tilde{A}(t)\|_{L^2\to L^2} = O(h)$

---

Пусть $\underset{\Psi^0(X)}{A}$: $\int\limits_{\{p=c\}} \sigma(A)\,d\mu_c = \alpha$ не зависит от $c\in[a,b]$ $\quad$ (e)

**Th** $$h^n \sum_{a\le\lambda_j(h)\le b} \Big|\langle Au_j(h), u_j(h)\rangle - \fint\limits_{\{a\le p\le b\}} \sigma(A)\,dx\,d\xi\Big|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

**Д-во** $A \rightsquigarrow A - \alpha\,Id \Rightarrow \alpha = 0.$

$$\varepsilon(h) := h^n \sum_{a\le\lambda_j\le b} |\langle Au_j(h), u_j(h)\rangle|^2$$ - среднее арифм. квадратов

$\langle A(t)u_j, u_j\rangle = \langle Au_j, u_j\rangle \Rightarrow \langle Au_j, u_j\rangle = \langle \underbrace{\fint_0^T A(t)dt}_{\langle A\rangle_T}\, u_j, u_j\rangle$. fix $T$.

$$|\langle\langle A\rangle_T u_j, u_j\rangle|^2 \le \|\langle A\rangle_T u_j\|^2 = \langle\langle A^*\rangle_T\langle A\rangle_T u_j, u_j\rangle$$

$\langle A\rangle_T = \langle\tilde{A}\rangle_T + O_{L^2\to L^2}(h)$, $O = O_T$.

$$\sigma\langle\tilde{A}\rangle_T = \fint_0^T \sigma(A)\circ g^t\,dt$$

главный символ $\langle\tilde{A}^*\rangle_T\langle\tilde{A}\rangle_T$

$$\varlimsup_{h\to 0}\varepsilon(h) \le \varlimsup_{h\to0} h^n\Big[\sum_{a\le\lambda_j\le b}\langle\langle\tilde{A}^*\rangle_T\langle\tilde{A}\rangle_T u_j, u_j\rangle + O(h)\Big] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{a\le p\le b} \sigma\langle\tilde{A}^*\rangle_T\cdot\sigma\langle\tilde{A}\rangle_T\,dx\,d\xi =$$

$Op(\sigma\langle\tilde{A}^*\rangle_T)\,Op(\sigma\langle\tilde{A}\rangle_T) + h\Psi^{-1}$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{a\le p\le b} |\sigma\langle A\rangle_T|^2\,dx\,d\xi}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} 0}.\quad \forall T. \Rightarrow \varepsilon(h)\xrightarrow[h\to0]{} 0 \ \blacksquare$$

$\xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ - по мажорированной сходимости и из эргодичности.

Сл-е $\exists\ \Lambda(h) \subset \{\cancel{a \le \lambda_j}\ \lambda_j : a \le \lambda_j(h) \le b\}$ :

$\#\Lambda(h) \sim \#\{\lambda_j \in [a,b]\}$, и:

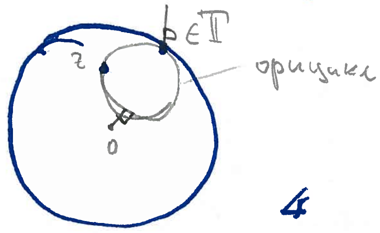
$\forall A \in \Psi^0$, т.ч. (е) $\qquad \langle A u_j, u_j \rangle \longrightarrow \fint_{a \le p \le b} \sigma(A)\, dx\, d\xi \quad \forall j : \lambda_j \in \Lambda(h)$

Теорема Если $-\Delta u_j = \lambda_j u_j$ на $X$ – комп. гиперб. поверхность, то

$\exists\ u_{j_k} : u_{j_k}^2 \longrightarrow const$. $\{j_k\}$ – плотности 1. ∎

Appendix: <u>Преобразование Фурье-Хелгасона</u>

$\mathbb{D}$, $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$, $K = -\frac{1}{4}$. // $e^{i\langle x,\xi\rangle} = e^{i\lambda\langle x,\vec{e}\rangle}$, $\|\vec{e}\| = 1$, $\xi \neq 0$ //




$\langle z, b\rangle :=$ расстояние со знаком от 0 до орицикла через z и b

$\forall \quad e^{(-i\lambda+1)\langle z,b\rangle}$ ; $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f \in C_0^\infty(\mathbb{D})$; $\tilde{f}(\lambda, b) := \int_{\mathbb{D}} f(z)\, e^{(-i\lambda+1)\langle z,b\rangle}\, dA(z)$

<u>Th</u> $f(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{\mathbb{T}} db\, \tilde{f}(\lambda, b)\, e^{(i\lambda+1)\langle z,b\rangle}\, \lambda \tanh\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)$

// $db(\mathbb{T}) = 1$ //

— Зельдич строил ΨDO на гиперболических поверхностях через это Фурье (перейдя на накрывающее).