Оценка Отала–Розаса на собственные числа лапласиана на гиперболических поверхностях

Конспект микрокурса

Михаил Дубашинский

Лаборатория Чебышёва, март 2017 г.

Основная цель курса – оценка Отала–Розаса. Если λ_n – n-е собственное число оператора Бельтрами–Лапласа на компактной гиперболической поверхности X рода $g \geq 2$, то $\lambda_{2g-2} > 1/4$.

Для доказательства предположим противное и разобьём множество *ненулевых* линейных комбинаций f собственных функций с $\lambda < 1/4$ на множества T_j, определяемые, грубо говоря, так:

$$T_j = \{f \colon \chi(\{f > 0\}) + \chi(\{f < 0\}) = -j\}\,;$$

здесь χ – эйлерова характеристика, а j пробегает от 1 до $2g-2 = -\chi(X)$. Множества T_j удовлетворяют условиям теоремы типа Улама–Борсука (стр. 8); значит, их не может быть слишком мало, если собственных функций слишком много.

Множества $\{f > 0\}$ и $\{f < 0\}$ заменяются в доказательстве (и в определении разбиения $\{T_j\}$) на множества $\Sigma^{\pm}(f)$, получаемые очисткой нодальных областей от разной шелухи (отбросим компоненты в $Z(f)$, помещающиеся в диск, нодальные области, гомеоморфные диску или кольцу, также надо избавляться от мешающих колец в некоторых других случаях). Проверим условие теоремы типа Улама–Борсука. Пусть f_t, $t \in [0,1]$, — гомотопия ненулевой линейной комбинации собственных функций с $\lambda < 1/4$, переводящая f в $-f$ и не выводящая из T_j. *Тогда* $\chi(\Sigma^{\pm}(f_t))$ *полунепрерывно сверху зависит от* t. (В построении нодальные области могут склеиться скачком, но не могут скачком порваться! – При любом понимании этого скачок может происходить только в одном направлении; χ тем отрицательнее, чем больше склеек в множестве.) По определению множеств T_j, тогда $\chi(\Sigma^{\pm}(f_t))$ остаются постоянны при изменении t; из построения следует, что тогда все множества $\Sigma^{+}(f_t)$ изотопны при разных t, но тогда $\Sigma^{+}(f)$ изотопно $\Sigma^{-}(f) = \Sigma^{+}(-f)$, что невозможно для двух непересекающихся множеств отрицательной эйлеровой характеристики. (Из построения $\chi(\Sigma^{\pm}(f)) \leq 0$, причём хотя бы одно из неравенств – строгое.)

Таким образом, номер $2g-2$ получается как $-\chi(X)$; а постоянная $1/4$, имеющая наифундаментальнейшее значение для поверхностей кривизны -1, — в данном случае это λ_0 гиперболической плоскости, накрывающей X, или же хардиевская четверть.

Теореме Отала–Розаса предшествуют сводка результатов о гиперболических поверхностях и некоторые оценки собственных чисел (и примеры, показывающие точность), получаемые с помощью препарированного принципа максимума (вилка "Дирихле–Нейман"), нарезки на штаны и обратной склейки, а также — изопериметрического неравенства Чигера.

Библиография.

- J.-P. Otal, E. Rosas, *Pour toute surface hyperbolique de genre g,* $\lambda_{2g-2} > 1/4$, 2009.
- P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces.*

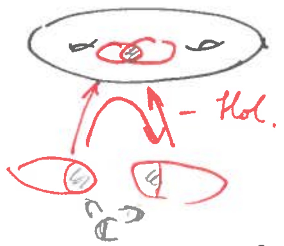
I. Гиперболические поверхности

Опр. Компактное риманово многообразие X, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$, наз. гиперболическим, если оно локально изометрично куску плоскости Лобачевского $\mathbb{H}$.

Опр. $\mathbb{H}$ - это $\mathbb{C}^+$ с метрикой $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ [Th. синусов...]

$$\cosh \operatorname{dist}(z,w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w} \qquad dA = \frac{dx\,dy}{y^2}$$

Опр. Риманова поверхность - X, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2$,



$\Leftrightarrow$ X ориентируемо и на X есть углы между касательными векторами. (Но a priori нет длин векторов.)

Теорема (об униформизации) X - комп. риманова поверхность, род $g(X) \geq 2$ (= число ручек) $\Rightarrow$ на X $\exists!$ метрический тензор, дающий те же углы (как на римановой поверхности) и при этом делающий X гиперболической поверхностью. [$K = -1$ - гауссова кривизна.]

$$\int_X K\,dA = \underbrace{(2-2g)}_{\chi(X)} \cdot 2\pi$$

Опр. Y, X - линейно связные т.п., $\pi: Y \to X$ - накрытие, если $\forall x \in X$ $\exists U(x)$ - окрестность x в X, т.ч. $\pi^{-1}(U) \simeq U \times D = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$; на $\forall V_j$ π - гомеоморфизм V_j на U. со слоем D - дискретное т.п.

Зам. Можно говорить о накрытиях римановых многообразий: $V_j \xrightarrow{\pi} U$ - изометрия

Зам. X - гиперболическая поверхность, $g \geq 2$. Тогда $\exists$ $\pi: \mathbb{H} \to X$ - лок. изом. накрытие со счётным слоем.

$$\left[\int_X K\,dA = 2\pi \underset{2-2g}{\chi(X)}\right] \qquad dA = \frac{dx\,dy}{y^2} \text{ в } \mathbb{H}$$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ ad-bc=1 \end{matrix} \right\} \Big/ \{\pm Id\}$$

$$\left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H})$$

Th. $\forall X$ - комп. гиперб. поверхность $\exists$ $G \subset PSL(2,\mathbb{R})$ - дискретная без неподв. точек, т.ч. $X \simeq G \backslash \mathbb{H}$. При этом $G \simeq \pi_1(X)$.

Зам. У дискретной подгруппы в PSL $\exists$ фундаментальная область $D \subset \mathbb{H}$: $g_1 D \cap g_2 D = \varnothing$, $g_1 \neq g_2 \in G$, $\mathbb{H} = \bigcup_{g \in G} \overline{gD}$ (область Вороного, напр.)

Зам. Пусть X - комп. Тогда в качестве D можно взять геодезический многоугольник, комп. (область Фрике) с $4g$ сторонами (g - род). Стороны D склеиваются парами под действием G, а все вершины склеиваются в одну. Сумма углов $D = 2\pi$

2

Оператор Лапласа

Риманово многообразие, метрический тензор (g_{jk}); $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{jk})}} \sum_{j,k} \partial_j \left(g^{jk} \sqrt{\det(g_{jk})}\, \partial_k u \right)$$

В $\mathbb{H}$: $\Delta_{\mathbb{H}} u = y^2 \Delta_{\text{евкл.}} u$ => он задан на гиперболической поверхности. (т.к. сохраняется при изометриях)

Зам. $\int_X f \Delta g \, dA = -\int_X \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle \, dA \qquad f, g \in C_0^\infty(X)$

$$\operatorname{grad} f = (g^{jk}) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$ — метрический grad

Теорема X - компактная гиперболическая поверхность, $\partial X = \varnothing$. Задача $-\Delta u = \lambda u$ имеет полную ортонормированную систему C^∞- собственных ф-й $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ (с) $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\lambda_0} < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \to +\infty$)

Зам. Изометричность $\not\Leftrightarrow$ изоспектральность $\Leftrightarrow$ совпадение „геодезических спектров"

Th. (формула Сельберга) $r_n := \cancel{i\sqrt{\tfrac{1}{4} - \lambda_n}}\ \sqrt{\lambda_n - \frac{1}{4}}$; h - чётная на $\mathbb{R}$, быстро убывает, Hol (вблизи $\mathbb{R}$)

$\mathcal{C}(X)$ - замкнутые геод. на X ориент.

$\gamma \in \mathcal{C}(X) \Rightarrow \Lambda(\gamma) = l(\gamma_0)$, γ_0 - примитивные

$N_\gamma = e^{l(\gamma)}$

$$\sum_{n \ge 0} h(r_n) = \frac{A(X)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r\, h(r) \tanh(\pi r)\, dr + \sum_{\gamma \in \mathcal{C}(X)} \frac{\Lambda(\gamma)}{N_\gamma^{1/2} - N_\gamma^{-1/2}} \hat{h}(l(\gamma))$$

II. Теорема Бузера

Теорема (I принцип minimax; $\dots \Rightarrow \lambda \le \dots$) $f_0 \dots f_k \in C^\infty(X)$

$$\int_X f_j^2\, dA = 1; \quad A(\operatorname{supp} f_j \cap \operatorname{supp} f_k) = 0,\ k \neq j$$

Тогда $\lambda_k(X) \le \max\limits_j \int\limits_X |\operatorname{grad} f_j|^2\, dA$

Th / **Утв.** $\forall n, g, \varepsilon\ \exists X$ рода g: $\lambda_n(X) < \frac{1}{4} + \varepsilon$

Утв. $\exists X$: на X есть очень короткая замкнутая геод.

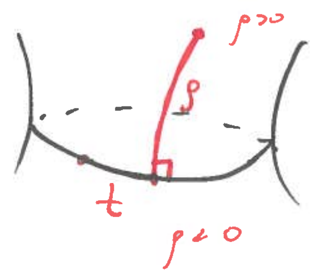
— не стягиваема.

l - длина

Утв. Collar Theorem

$$\begin{cases} \sinh|\rho| \le \dfrac{1}{\sinh \frac{1}{2} l} \\ t \in \mathbb{R}/\{t = t + ln\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

— взаимно однозначно картируют кусок в X. диффеоморфно



$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2\rho\, dt$$

Т.е. на X есть "воротник" $|\rho| \le w$, $w \gg 1$, $t \in \mathbb{R}/\{t = t + l\}$

Пусть $[a,b] \subset [\cancel{-w}\,0, w]$ - интервал. (на этих дизъ. интервалов)

$$f(\rho, t) = f(\rho) = e^{-\rho/2} \sin\frac{\pi(\rho - a)}{b - a}$$

$$C_{ab} = \{(\rho, t) : \rho \in [a, b]\}$$

$|\operatorname{grad} f| = |f'_\rho|$

$$\int_{C_{ab}} |\operatorname{grad} f|^2\, dA =$$

$dA = \cosh\rho \cdot dt\, d\rho$

$$l \int_a^b |f'_\rho|^2 \cosh\rho\, d\rho \le \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{(b-a)^2}\right)\left(1 + e^{-2a}\right) \int_{C_{a,b}} f^2\, dA$$

$$\int_{C_{a,b}} |f|^2 = l \int_a^b |f|^2 \cosh\rho\, d\rho$$

надо: $b - a \gg 1$
$a \gg 1$

Штаны

Опр Штаны — гиперболическая поверхность с краем; гомеоморфна сфере с 3 дырками; каждый из трёх кусков границы — геодезический цикл.

Th (Берс) X — комп., рода $g \geq 2$. $\exists$ дизъюнктные замкнутые геодезические $\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3}$ в X, разбивающие X на $2g-2$ штанов, причём $l(\gamma_j) \leq 4j \log \frac{8\pi(g-1)}{j}$ $\quad j = 1, \dots, 3g-3$.

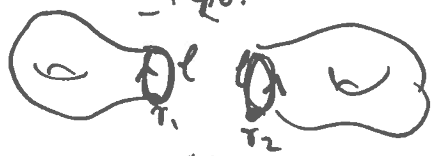
$[\leq 26(g-1)]$

Th $\forall\, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}$ $\exists!$ штаны с длинами границ l_1, l_2, l_3.

Th (Buser) $\underset{\forall g, \varepsilon}{}$ $\exists X: \lambda_{2g-3} < \varepsilon$.

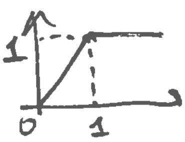
Д-во $Y_1, \dots, Y_{2g-2}$ — изоморфные гиперб. штаны, длины границ $< \varepsilon/100$

склеим по границам.

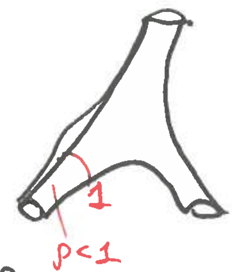
Зам. 

— можно склеить по γ_1 и γ_2

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \notin Y_k \\ \operatorname{dist}(x, \partial Y_k); & \operatorname{dist}(x, \partial Y_k) < 1, \ x \in Y_k \\ 1, & x \in Y_k, \ \operatorname{dist}(x, \partial Y_k) \geq 1 \end{cases}$$

— соболевская; $f_k(p) =$  на Y_k

$|\operatorname{grad} f_k| = 1$ на $\{\operatorname{dist}(\cdot, \partial Y_k) \leq 1\} \cap Y_k$



$A($$)_{\operatorname{grad} \neq 0} \ll 1$.

$$\int_{Y_k} f_k^2 \geq 2\pi - \varepsilon$$

$$\int_{Y_k} |\operatorname{grad} f_k|^2 < \varepsilon$$

$A(Y_k) = 2\pi$

∎

II.1 $\forall X \quad \lambda_{4g-2} > 1/4$

Th (второй принцип минимакса) $N_1, \dots, N_k \subset X$ - замыкания областей, $X = N_1 \cup \dots \cup N_k$, $A(N_j \cap N_{j'}) = 0$

$$\nu(N_j) := \inf \int_{N_j} |\mathrm{grad}\, f|^2 dA, \quad f\text{-гладкая в } N_j,\ \int_{N_j} f^2 dA = 1,$$
$$\int_{N_j} f\, dA = 0$$

Тогда: $\lambda_k(X) \geq \min_j \nu(N_j)$

Опр. X - компактная гиперб. поверхность; $N \subset X$ - кусок с кусочно-гл. границей.

$$h(N) = \inf \frac{l(A)}{\min\{A(B), A(B')\}},$$ A пробегает конечное объединение кусочно-гладких кривых в N. A разбивает N на B и B'.

$N \setminus A = B \sqcup B'$, B, B' - относительно открыты в N
$A \subset \partial B \cap \partial B'$

— изопериметрическая константа Чигера.

Теорема (Нер-во Чигера - (?) Яу)
$\nu(N) \geq \frac{1}{4} h^2(N)$

Лемма Яу $\exists N$ - связно. Тогда в def $h(N)$ можно считать, что B, B' - связны.

Д-во $\forall f$: $\int f = 0$; ? $\int |\mathrm{grad}\, f|^2 dA \geq \frac{1}{4} h^2(N) \int f^2 dA$

$\forall c \quad \int_N (f+c)^2 dA = \int_N (f^2 + c^2) dA \geq \int_N f^2 dA$

$\exists c$: $N_1 = \{x \in N : (f+c)(x) < 0\}$, $N_2 = \{x \in N : (f+c)(x) > 0\}$, $A(N_j) \leq \frac{A(N)}{2}$

Докажем, что $\int_{N_j} |\mathrm{grad}(f+c)|^2 dA \geq \frac{1}{4} h^2(N) \int_{N_j} (f+c)^2 dA \qquad j = 1, 2$

$\mathrm{grad}(f+c)^2 = 2(f+c)\,\mathrm{grad}(f+c)$

$$4 \int_{N_j} (f+c)^2 dA \cdot \int_{N_j} |\mathrm{grad}(f+c)|^2 dA \geq \left(\int_{N_j} |\mathrm{grad}(f+c)^2| dA \right)^2$$

$\Rightarrow$ надо: $\int_{N_j} |\mathrm{grad}\, u|\, dA \geq h(N) \int_{N_j} u\, dA$. $A_j(t) := \{x \in N_j : u(x) = t\} \quad t > 0$

$u = (f+c)^2$

$$\int_{N_j} |\mathrm{grad}\, u|\, dA = \int_0^{+\infty} l(A_j(t))\, dt$$

$B_j(t) := \{x \in N_j : u(x) > t\}$; $u|_{\partial N_j \cap N} = 0$

$\ell(A_j) \geq h(N) \cdot \mathcal{A}(B_j(t))$; $\int_0^\infty \mathcal{A}(B_j(t))\, dt = \int_{N_j} u\, dA$. ■

Зам. Бизер: $\lambda_1 \leq c_n(\delta h + h^2)$

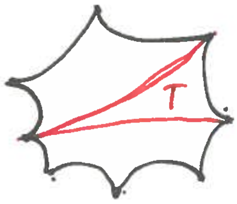
X – риманово многообразие, кривизна Риччи $\geq -\delta^2$

dim = n

комп. $\partial X = \emptyset$

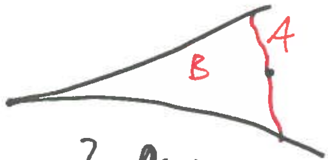
Нер-во $\lambda_{4g-2} > \frac{1}{4}$

Разрежем X в код выпуклый геодезический $4g$-угольник



$4g-2$ треугольника.

$\Rightarrow ?\ h(T) \geq 1$.



$? \mathcal{A}(B) \leq \ell(A)$

Полярные коорд. ρ, τ

$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\tau^2$

$A \doteq \rho(t), \tau(t)$ $\qquad \ell(A) = \int \left(\rho'(t)^2 + \sinh^2\rho \cdot \tau'(t)^2\right)^{1/2} dt$

$\mathcal{A}(B) = \int (\cosh\rho(t) - 1)\, \tau'(t)\, dt \quad \Rightarrow$ ■

III. Otal, Rosas: $\lambda_{2g-2} > 1/4$

Было: $\underline{\text{Th}}$ (Sevennec 2002) X — компактная. $\forall v: X \to \mathbb{R}$, гл., кратность второго с.з. $-\Delta + v$ $\leq 2g+3$

$\underline{\text{Th}}$ (Otal'08): $\lambda \leq 1/4 = \lambda_0(\tilde{X})$ $\Rightarrow$ кратность $\lambda \leq 2g-3$

$\tilde{X} = \mathbb{H}$

$\underline{\text{Утв.}}$ (типа Улама-Борсука) $S \subset \mathbb{R}^n$; $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$:

$S = S(0,1)$

1. $\forall j$ $S_j = -S_j$
2. $\forall j$ $S_j/_{\{\pm 1\},\ x=-x} \xleftarrow{\pi} S_j$ — накрытие тривиально. $\simeq S_j/_{\{x=-x\}} \times \{-1,1\}$

$\forall j\ \forall x \in S_j$ $x, -x$ — в разных компонентах связности в S_j.

Тогда $k \geq n$.

кратность λ $\underbrace{\geq 2g+4}$ ... $\mathcal{E}$ = пр-во λ-собственных ф-й.

$S \subset \mathcal{E}$ — сфера отн. L^2-нормы

$f \in S$ $\quad S_j = \{f:\ b^1(X^+(f)) + b^1(X^-(f)) = j\}$

$X^+(f) = \{f > 0\}$, $X^-(f) = \{f < 0\}$ — это Sevennec'a

$\underline{\text{Опр.}}$ $X \subset Y$ — т.п., X с индуцир. топологией; X несжимаемо в Y, если $\pi_1(X) \xrightarrow[\text{инъ.}]{} \pi_1(Y)$.

Т.е.: если $\gamma \subset X$ — петля, γ стягиваема в Y $\Rightarrow$ γ стягиваема в X.

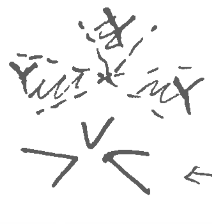
$\underline{\text{Опр:}}$ Y — т.п. Изотопия: $\text{Homeo}(Y \to Y) \ni \text{Id}$ — его гомотопия.

$\underline{\text{Опр.}}$: Эйлерова характеристика. X — гиперб. поверхность, $Y \subset X$ — подмногообразие с кусочно-гл. ∂Y

Триангулируем Y, $\chi(Y) = В - Р + Г$

$Y \subset X$ — откр. мн-во; ∂Y

$$\boxed{\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N)}$$



← надо так его считать

$0=\lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_{2g-2} \le \dots$; $\lambda_{2g-2} \le \frac{1}{4}$

$1 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{2g-2}$

$\left\{ f = \sum_{j=0}^{2g-2} \alpha_j f_j \right\} = \mathcal{E}$; $S = S(\mathcal{E})$

Предл. $f \in \Sigma \Rightarrow Z(f)$ - объединение конечного вложенного графа без висячих вершин и конечного множества.

- без д-ва.

1. $\Gamma(f)$ = нодальный граф = $Z(f) \setminus$ изолированные $(\cdot)$
2. $G(f) = \Gamma(f) \setminus$ компоненты в $\Gamma(f)$, содержащиеся в дисках

Зам. Компонента в $X \setminus G(f)$ = $\underbrace{\text{Компонента в } X \setminus \Gamma(f)}$ $\sqcup$ конечное число топ. дисков.

Дадим ей вот этот знак $\longrightarrow$ f не меняет знак

$\pm \quad \Leftarrow \quad \pm$

3. $C^{\pm}(f) := \cup$ компонент в $X \setminus G(f)$ со знаком + (или -)

Утв. 1. $C^+(f)$, $C^-(f)$ несжимаемы в X. - из картинки или def.

4. $S^+(f)$ $(S^-(f))$ = $\cup$ компонент в $C^{\pm}(f)$, которые не гомеоморфны диску или кольцу. Зам. $S^{\pm}$ - несж.

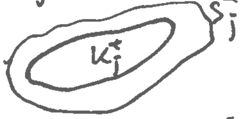
Утв. 2. a. $\chi(S^{\pm}(f)) \le 0$. $\chi(S^{\pm}(f)) = 0 \Leftrightarrow S^{\pm} = \emptyset$

b. $\chi(S^+(f)) + \chi(S^-(f)) \ge \chi(X) = 2-2g$.

из свойств χ (χ диска, $\cup$, $\sqcup$, цикла, ориентируемой поверхности)

Утв 3 $f \not\equiv 0 \Rightarrow \chi(S^+(f)) + \chi(S^-(f)) < 0$ — см. далее

$\exists\, S_j^+$ - компонента связности в $S^+(f)$. Определим компактный сердечник $K_j^+ \subset S_j^+$ (отступить от границы)



5. $\Sigma'^{\pm}(f) := \cup K_j^{\pm}$
6. $\Sigma^+(f) := \Sigma'^+(f) \cup$ компоненты в $X \setminus \Sigma'^+(f)$, которые кольца.

$\Sigma^-(f) = ..$ Зам. $\Sigma'^{\pm}$ несж. ; $\Sigma^{\pm}$ тоже.

Утв. $\Sigma^+(f) \cap \Sigma^-(f) = \emptyset$.

8

Д-во Ут.6.3 f т.ч. ... $\Rightarrow$ т.е. все компоненты в $C^{\pm}(f)$ — гомеом. кольцам или дискам.

$f = \sum \alpha_i f_j$, с.ф., $\lambda \le 1/4 = \lambda_0(\tilde X)$

$$\Rightarrow \int_X |\operatorname{grad} f|^2 dA < \lambda_0(\tilde X) \int_X |f|^2 dA$$
$\mathbb H$)

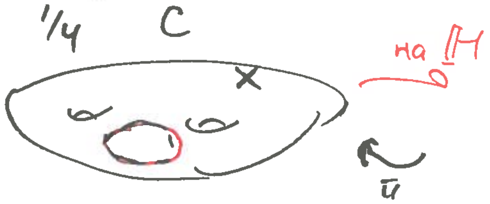
Опр. X — некомп. гиперб. поверхность.

$$\lambda_0(X) = \inf \frac{\int_X |\operatorname{grad} f|^2 dA}{\int |f|^2 dA}$$
$f \in C_0^\infty(X)$.

$\Rightarrow$ если C — компонента в $C^+(f)$ или $C^-(f)$, т.ч.

$$\int_C |\operatorname{grad} f|^2 dA < \underset{1/4}{\lambda_0(\mathbb H)} \int_C |f|^2 dA$$

Сл. 1 C — диск.



$f|_{\partial C} = 0$

$\tilde C$ — один из кусков $\pi^{-1}(C)$

$$\tilde f := \begin{cases} f \circ \pi & \text{на } \tilde C \\ 0 & \text{в } \mathbb H \setminus \tilde C \end{cases}$$

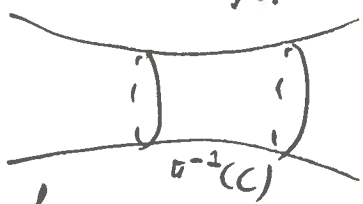
$\tilde f \in \mathring W^{1,2}(\mathbb H)$

$$\int |\operatorname{grad} f|^2 dA = \int |\nabla \tilde f|^2 dx\,dy \quad (\mathrm{I}) \ge \tfrac14 (\mathrm{II})$$
$\frac{\partial}{\partial y}$ — нер-во Харди.

$$\int |f|^2 dA = \int \left|\frac{\tilde f}{y}\right|^2 dx\,dy \quad (\mathrm{II})$$

Сл.2 C — кольцо

Ут. $\exists$ лок. изом. Cyl.



$f \circ \pi$

$Cyl \simeq {}_{\langle\gamma\rangle}\backslash \mathbb H$ — цикл. группа

Утв. $\forall\, \gamma \in PSL(2,\mathbb R)$

$\gamma = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_1$, $\gamma_2 = \left[\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \text{— поворот вокруг (·) } i \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} & \lambda \in \mathbb R \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & x \in \mathbb R \end{array}\right.$

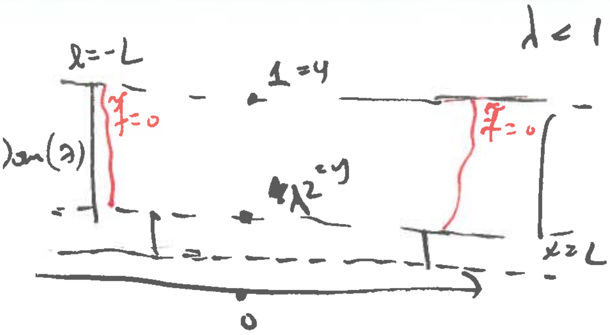
Утв. Если $X = {}_G\backslash \mathbb H$ — компактная, то в $G \setminus \{Id\}$ только гиперболические эл-ты.

$Cyl = {}_{\langle \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \rangle}\backslash \mathbb H$, γ

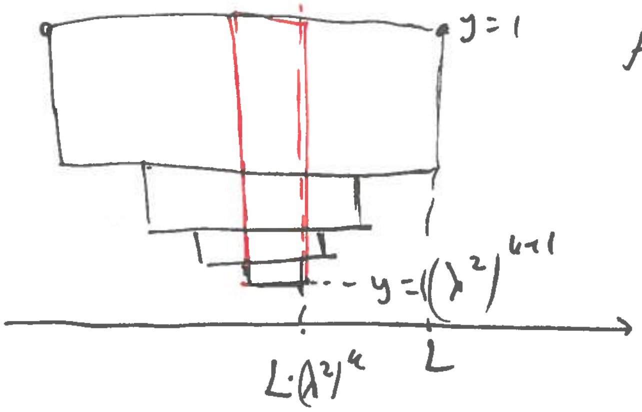
$z \mapsto \lambda^2 z$

$\tilde f : \mathbb H \to \mathbb R$: $\tilde f \circ \gamma^m = \tilde f$

$\lambda < 1$



— д-во про до цилиндра



$$A(\square) = \int_{\square} \frac{dx\,dy}{y^2} \asymp const$$

Нер-во Харди по $|x| \in [L\cdot(\lambda^2)^k, L] = I$

$$\int_0^1 dy \int_I dx \left|\frac{\partial \tilde f}{\partial y}\right|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{4} \int_0^1 dy \int_I dx \left(\frac{f}{y}\right)^2$$

$$LHS \leq k \cdot \int_{Cyl} |\operatorname{grad} f|^2 \, dA$$

$$RHS \geq \frac{1}{4} \cdot k \cdot \int_{Cyl} |f|^2 \, dA - A(\square) \cdot \max |f|^2$$

$\mathcal{E} = \{\sum_{i=0}^{2g-2} \alpha_i f_i\}$; $\mathcal{S} = S_{\mathcal{E}}(0,1)$. $T_j = \{f \in \mathcal{S} : \chi(\Sigma^+(f)) + \chi(\Sigma^-(f)) = -j\}$
$j = 1, \dots, 2g-2$

11

$\Sigma^\pm(f) = \Sigma^\mp(-f)$ $\Rightarrow T_j = -T_j$

<u>Утв.</u> $\forall j$ накрытие $T_j \to T_j/_{\{x \sim -x\}}$ тривиально, т.е. $\forall f \in T_j$ $f, -f$ в разных компонентах в T_j.

<u>Д-во</u> Можно считать, что $\partial(\Sigma^\pm(f)) \cap Z(f) = \emptyset$.

Пусть g близко к f. Можно считать, что $\forall K_j^+(f)$ содержится в связной компоненте нек. $S_\varepsilon^+(g)$. [разрыв в особой (-)!!!]

$\Rightarrow$ можно считать, что $\Sigma'^+(f) \subset \Sigma'^+(g)$

<u>Утв</u> Можно считать, что $\Sigma^\pm(f) \subset\subset \Sigma^\pm(g)$.
[- для колец]

<u>Зам.</u> $\Sigma^\pm(f)$ несжимаемо в $\Sigma^\pm(g)$.

$\chi(\Sigma^+(g)) = \chi(\Sigma^+(f)) + \chi(\overline{\Sigma^+(g) \setminus \Sigma^+(f)}) - \chi(\Sigma^+(f) \cap \overline{\Sigma^+(g) \setminus \Sigma^+(f)})$

$\Rightarrow \chi(\Sigma^\pm(f)) \geq \chi(\Sigma^\pm(g))$

f_t: $f_0 = f$, $f_1 = -f$, $f_t \in T_j$

$\chi(\Sigma^+(f_t)) + \chi(\Sigma^-(f_t)) = const = -j \Rightarrow \chi(\Sigma^\pm(f)) = \chi(\Sigma^\pm(g))$

$g = f_t$, $t \approx 0$

$g \in T_j$, $g \approx f$

$\Rightarrow \Sigma^\pm(g)$ изотопно $\Sigma^\pm(f)$.

$\Rightarrow \Sigma^+(f)$ изотопно $\Sigma^-(f)$ $[= \Sigma^+(-f)]$

<u>Утв.</u> $Y_1, Y_2 \subset X$ - подповерхности с краями; $\chi(Y_i) < 0$; $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$; $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$; $\Rightarrow Y_1$ и Y_2 неизотопны в X.

Y_1, Y_2 несжимаемы в X. □